1	2	3	$\sum$

Name:

Übungsgruppe:

S. Scherer, T. Bauer, S. Gorini, K. Koschke

Abgabe 15.2.2012

Theoretische Physik 2 (MEd) (WS 2011/2012)
Übung 12

1. **[10]** Gegeben seien die Drehimpulseigenfunktionen Y_{lm} mit

$$\begin{aligned}
(\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2 + \hat{l}_3^2) Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar^2 \, l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi), \\
\hat{l}_3 Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar \, m Y_{lm}(\theta, \phi), \\
\hat{l}_\pm Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l,m\pm 1}(\theta, \phi),
\end{aligned}$$

wobei $\hat{l}_\pm = \hat{l}_1 \pm i \hat{l}_2$ gilt. Berechnen Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren die Schwankungsquadrate $(\Delta l_i)^2 = \langle \hat{l}_i^2 \rangle - \langle \hat{l}_i \rangle^2$ für $i = 1, 2$ und 3 in einem Zustand Y_{lm}.

Hinweis: Machen Sie von der Bra-Ket-Notation Gebrauch. Beispiel:

$$\langle l, m | \hat{l}_3 | l, m \rangle = \hbar m \langle l, m | l, m \rangle = \hbar m.$$

Alternativ:

$$\int \mathrm{d}\Omega \, Y_{lm}^*(\theta, \phi) \hat{l}_3 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m \int \mathrm{d}\Omega \, Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m.$$

2. **[7]** Die Eigenzustände zu $l = 2$ und $m = 2, 1, 0, -1, -2$ seien durch

$$|2, 2\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2, 1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad |2, -2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Wie lauten die zugehörigen Matrizen zur Darstellung der Drehimpulsoperatoren $\hat{l}_1$, $\hat{l}_2$ und $\hat{l}_3$?

3. Die beiden Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ („Spin up“ und „Spin down“) seien orthonormierte Eigenzustände eines Spin-$\frac{1}{2}$-Systems:

$$\langle \uparrow | \uparrow \rangle = \langle \downarrow | \downarrow \rangle = 1, \quad \langle \uparrow | \downarrow \rangle = \langle \downarrow | \uparrow \rangle = 0.$$

(a) **[10]** Verifizieren Sie

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}_k \quad \text{und} \quad \{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{ij},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\hat{S}_1 &= \frac{\hbar}{2} \Big(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \Big), \\
\hat{S}_2 &= \frac{i\hbar}{2} \Big(-|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \Big), \\
\hat{S}_3 &= \frac{\hbar}{2} \Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \Big).
\end{aligned}$$

(b) **[7]** Die Eigenzustände seien durch

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Wie lauten die zugehörigen Matrizen zur Darstellung von $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ und $\hat{S}_3$?

(c) **[6]** Es sei

$$(\Delta S_i)^2 = \langle \hat{S}_i^2 \rangle - \langle \hat{S}_i \rangle^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Berechnen Sie $(\Delta S_1)^2$, $(\Delta S_2)^2$ und $(\Delta S_3)^2$ für den Zustand $|\uparrow\rangle$.