Name:	1	2	3	4	5	$\sum$

Übungsgruppe:

S. Scherer, T. Bauer, S. Gorini, K. Koschke — Abgabe 25.01.2012

Theoretische Physik 2 (MEd) (WS 2011/2012)
Übung 9

1. **[6]** Gegeben seien die Mengen

$$\left\{ \Psi_{\vec{p}}(\vec{x}\,) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}\right) \middle| \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \right\},$$
$$\left\{ \Psi_{\vec{x}_0}(\vec{x}\,) := \delta(\vec{x}-\vec{x}_0) | \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

   und das Skalarprodukt

$$\langle \Psi | \varphi \rangle := \int \mathrm{d}^3x\, \Psi^*(\vec{x}\,)\varphi(\vec{x}\,).$$

   Berechnen Sie

$$\langle \Psi_{\vec{q}} | \Psi_{\vec{p}} \rangle, \quad \langle \Psi_{\vec{x}_0} | \Psi_{\vec{p}} \rangle, \quad \langle \Psi_{\vec{y}_0} | \Psi_{\vec{x}_0} \rangle.$$

2. **[6]** Das Matrixelement eines linearen Operators $\mathcal{L}$ im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ der quadratintegrierbaren Funktionen ist definiert durch

$$\langle \Psi | \mathcal{L}\varphi \rangle = \int \mathrm{d}^3x\, \Psi^*(\vec{x}\,)\mathcal{L}\varphi(\vec{x}\,).$$

   Den adjungierten Operator $\mathcal{L}^\dagger$ haben wir mittels

$$\langle \Psi | \mathcal{L}\varphi \rangle =: \langle \varphi | \mathcal{L}^\dagger \Psi \rangle^* \quad \forall \quad \varphi, \Psi \in \mathcal{H},$$

   definiert. Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x_i}\Psi(\vec{x}\,) &= x_i\Psi(\vec{x}\,), \\ \mathcal{L}_{\nabla_i}\Psi(\vec{x}\,) &= \nabla_i\Psi(\vec{x}\,). \end{aligned}$$

   Zeigen Sie $\mathcal{L}^\dagger_{x_i} = \mathcal{L}_{x_i}$ und $\mathcal{L}^\dagger_{\nabla_i} = -\mathcal{L}_{\nabla_i}$.
   Hinweis: Quadratintegrierbare Funktionen müssen für $|\vec{x}\,| \to \infty$ genügend schnell abfallen, so dass Sie

$$\int \mathrm{d}^3x\, \nabla_i \left(\Psi^*(\vec{x}\,)\varphi(\vec{x}\,) \right) = 0$$

   verwenden dürfen.

3. Wir betrachten das Eigenwertproblem zu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \neq a \in \mathbb{R}.$$

   (a) **[3]** Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) **[3]** Geben Sie die normierten Eigenvektoren an.

(c) **[2]** Zeigen Sie, dass die zu λ_1 und λ_2 gehörenden Eigenvektoren orthogonal sind.

4. **[6]** Es seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ lineare Operatoren in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. (Zur Vereinfachung der Notation können Sie in *dieser* Aufgabe auf die Operatorhüte verzichten.) Zeigen Sie

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}, \\
[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}], \\
[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]\hat{D} + \hat{A}\hat{C}[\hat{B}, \hat{D}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{D}\hat{B} + \hat{C}[\hat{A}, \hat{D}]\hat{B}.
\end{aligned}
$$

5. Für die Komponenten des Impulsoperators und des Ortsoperators gilt

$$
\begin{aligned}
[\hat{p}_i, \hat{x}_j] &= \frac{\hbar}{i}\delta_{ij}, \\
[\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0, \\
[\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= 0.
\end{aligned}
$$

Die Komponenten des Drehimpulsoperators sind durch $\hat{l}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$ definiert.

Zeigen Sie

(a) **[2]** $[\hat{x}_i, \hat{l}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{x}_k$,

(b) **[2]** $[\hat{p}_i, \hat{l}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}_k$,

(c) **[6]** $[\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{l}_k$,

(d) **[4]** $\left[\sum_{i=1}^{3} \hat{l}_i\hat{l}_i, \hat{l}_j\right] = 0$.